

# A matematikai problémamegoldó gondolkodás vizsgálata 13—14 éves korú tanulóknál

OROSZ GYULÁNÉ

**Abstract.** In this paper is an experimental investigation of the mathematical problem-solving at the age of 13 and 14. It consists of an introduction, the framework of the study, research methods and problems, results and conclusions, a model.

## 1. Bevezetés, a témaválasztás indoklása

A NAT bevezetését megelőző években a matematikaoktatáshoz kapcsolódó hazai és nemzetközi kutatásokban igen nagy hangsúlyt kapott és kap ma is a tanulói teljesítmények mérése, összehasonlítása, a tantervi aspektusok vizsgálata (IEA, Monitor).

A MAWI-csoport (1994) széles körű vizsgálatot folytat annak feltárására, hogy a matematikatanulásának sikerességére milyen hatást gyakorol a tanulóknál a matematikáról kialakított nézet. Ezen vizsgálatok eredményeit figyelembe kell venni a matematikaoktatással kapcsolatos fejlesztéseknél.

Ugyanakkor ezek mellett fontos feltárni a matematikai problémamegoldás életkori jellemzőit, az esetleges alacsony teljesítményszint okait, az előforduló hibákat, hiányosságokat.

E gondolatok inspiráltak bennünket kutatásunk megkezdésekor. Vizsgálatunk célja a 13-14 éves tanulók matematikában nyújtott problémamegoldó gondolkodásának feltérképezése. Számos felvetés és válaszra váró kutatási kérdés fogalmazható meg ezen a területen. Milyen önálló és céltudatos a tanulók ezirányú tevékenysége? Milyen jellemző hibákat követnek el? Milyen következtetéseket vonhatunk le az előforduló hibák lehetséges okaira vonatkozóan? Mi jellemzi a 7. és mi a 8. osztályos tanulók teljesítményét? Milyen a részmegoldások teljesítése? Elakadás esetén milyen arányú a segítségnyújtás? Milyen megoldási módszereket alkalmaznak a tanulók? Mi jelenti a feladatban a tanulók számára a problémát? Végül ebben az egyáltalán nem teljes sorban a legnehezebben megválaszolható kérdés, hogy milyen összefüggésben vannak a tanulói teljesítmények a külső és belső motiváló tényezőkkel? Cikkünkben egy olyan elővizsgálat eredményeiről számolunk be, mely adatokat nyújt és segít abban, hogy egy szélesebb körű vizsgálat hipotéziseit, kérdéseit körültekintőbben és hatékonyabban tudjuk megfogalmazni.

## 2. A vizsgálatok tervezése, metodikai vonatkozásai

A gondolkodás vizsgálatának módszerére vonatkozó tudományos követelményeknek munkánk során igyekeztünk eleget tenni és teljes egészében elfogadtuk Lénárd Ferenc (1978) megállapításait:

1. Problémákat, feladatokat adunk a kísérleti személyeknek annak érdekében, hogy ezek a gondolkodási tevékenységet kiváltsák.
2. Elakadás esetén segítséget, ún. kisegítő feladatokat alkalmazunk.
3. Megvizsgáljuk, hogy a megoldási menetekben az ismeretek milyen szerepet játszanak.
4. Közvetlen rávezetéseket alkalmazunk.
5. A gondolkodási menet lépéseit gondosan feljegyezzük és elemezzük.
6. A gondolkodási tevékenység közben elkövetett hibák tanulmányozására nagy gondot fordítunk.
7. Sohasem tévesztjük szem elől, hogy a gondolkodási tevékenység kölcsönhatás a személy és a probléma között.

A feladatok összeállításának pszichológiai szempontjai közül figyelembe vettük (Kelemen, 1970) azon megállapítását, hogy „olyan feladatokat kell adni, amelyek bizonyos nehézségeket okoznak, a megoldásuk aktív tevékenységet igényel. A feladat olyan fokig legyen újszerű, hogy lehetséges legyen a múltbeli tapasztalatokhoz való kapcsolódása. Annyi elemet kell tartalmaznia, amennyi feltétlenül szükséges a pontos megértéshez; de kellő hézagokat is kell hagyni, hogy teret biztosítson az önálló tanulói műveletvégzés számára.” A témakör kiválasztásánál elfogadtuk Lénárd (1978) azon megállapítását, miszerint olyan feladatokat kell adnunk, amelyek elindítják „és egy bizonyos ideig - minden külső beavatkozás nélkül aktiválják a kísérleti személyek gondolkodási tevékenységét”. Az elemi számelméleti feladatok több okból is alkalmasnak látszottak erre. Egyrészt a Nemzeti Alaptanterv tananyagában a 10-16 éves korosztály minden évfolyamán előfordulnak számelméleti alapismeretek. Másrészt a számelméleti feladatokkal való foglalkozás felkelti a tanulók matematika iránti érdeklődését, rámutat a matematika tudomány szépségeire, kutatásra ösztönzi a tehetséges tanulókat (fontos motiváló tényezők), alkalmas lehet a matematikai képességek strukturájának feltárására.

## 3. Vizsgálati módszer

Vizsgálatunkat Egerben 12 általános iskolában végeztük, amelybe 373 14 éves és 241 13 éves tanulót vontunk be. A vizsgálatokban a feladatlapos és az egyéni felmérés módszerét alkalmaztuk.

Jelen dolgozatunkban a feladatlapos méréshez kapcsolódó tapasztalatainkat vázoljuk. Két számelméleti feladatot választottunk ki, amelyet a

7. és 8. osztályos tanulók problémamegoldó gondolkodásának vizsgálatához egyaránt felhasználtunk.

A feladatok a következők voltak:

1. Hány olyan egyenlőszárú háromszög van, amelyeknek oldalhosszai egész számok, és leghosszabb oldalának mérőszáma 1997?

2. Egy sakktábla minden mezőjébe beírjuk rendre az  $1, 2, 3, \dots, 64$  természetes számokat a bal felső sarokból indulva, balról jobbra, felülről lefelé haladva, majd minden lehetséges módon letakarjuk egy  $2 \times 2$ -es négyzettel. Hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 3-mal?

Feladatválasztásunkat gyakorlati, tanítási tapasztalataink, valamint egy elővizsgálat eredménye is megerősítí. A matematikai versenyfeladatok megoldásainak javítása során azt tapasztaltuk, hogy az elemi számelméleti feladatok e korosztály számára nehéznek bizonyultak (a teljesítmények alacsony szintje jelezte e tényt), így valóban igazi problémát jelentettek. Az elővizsgálat során a tanulók 12 feladat rangsorolását végeztették el nehézségi sorrendjük szerint, s e rangsorban az általunk kiválasztott két számelméleti feladat került az utolsó két ranghelyre.

#### 4. A feladatok értékelése

Mindkét feladatnál a következő csoportosítást tudtuk elvégezni:

- önállóan, jól oldja meg,
- önállóan, hibásan oldja meg,
- részmegoldások, sok hibával,
- nem képes megoldani a problémát.

A tanulók 1. és 2. feladatban nyújtott teljesítményét összegezve az alábbi eredményt kaptuk:

#### 7. osztály

|                                 | 1. feladat | 2. feladat |
|---------------------------------|------------|------------|
| Önállóan, jól oldja meg         | 3,2%       | 0,8%       |
| Önállóan, hibásan oldja meg     | 12,4%      | 4,6%       |
| Részmegoldások, sok hibával     | 15,8%      | 16,4%      |
| Nem képes megoldani a problémát | 68,6%      | 78,2%      |

1. táblázat

**8. osztály**

|                                 | 1. feladat | 2. feladat |
|---------------------------------|------------|------------|
| Önállóan, jól oldja meg         | 4,5%       | 1,2%       |
| Önállóan, hibásan oldja meg     | 13,3%      | 5,5%       |
| Részmegoldások, sok hibával     | 21,4%      | 18,6%      |
| Nem képes megoldani a problémát | 60,8%      | 74,7%      |

*2. táblázat*

A táblázatok adatai egyértelműen arra hívják fel a figyelmünket, hogy a tanulók önállósága igen alacsony szintű. A tanulók megoldásainak elemzéseiből nem tudunk következtetéseket levonni a sikertelenség okára vonatkozóan, mert ehhez további vizsgálatok szükségesek. A hetedik és nyolcadik osztályosok között nincs lényeges különbség az önállóság mértékét összehasonlítva. Ezért a 7. osztályosok első feladatának megoldásait elemezzük részletesen.

**A 7. osztály első feladatának tartalmi, metodikai elemzése****A feladat megoldásához szükséges előismeretek:**

Egyenlő szárú háromszög, alap, szár fogalmak ismerete — háromszög-egyenlőtlenség összefüggése, leghosszabb oldal értelmezése, oldalhossz mérőszáma, a háromszög oldalának mérőszáma egész szám, az összes lehetséges adott tulajdonságú háromszög megkeresése, egész számok összehasonlítása, rendezése.

**Problémát jelentett a tanulók számára:**

Nem volt megadva melyik a háromszög leghosszabb oldala (alapja vagy a szára). Az értelmezésnél is jelentkeztek gondok. A feladatot — tömör megfogalmazásából adódóan — a tanulók első olvasásra nem értették meg, ezért hozzá sem kezdtek a megoldásához, melyet a teljesítmények is igazolnak. Hibátlan megoldást mindössze két tanuló adott (1,2%), egyetlen számolási hibával egy tanuló oldotta meg jól a problémát, sok hibával helytelen megoldást adott a tanulók 28,2%. Nem foglalkozott a feladattal a tanulók 68,6%-a. A feladat összetettsége is nehézséget okozott.

**Az előforduló hibák, s azok lehetséges okai:**

Figyelmetlenségből adódó hiba, hogy a tanulók 18%-a felületesen olvasta el a feladatot és elsiklott az **egész számok**, szavak felett, ami fontos feltétel volt, s ezért jutottak a helytelen következtetésre, miszerint végtelen sok ilyen tulajdonságú háromszög van. A tanulók 3%-a nem értette a mérőszám szó jelentését, s ezért nem tudta értelmezni a feladatot, s kérte, hogy konkrét mértékegységben legyen adott az oldal hossza.

Hiányos előismeretből adódó hiba volt, hogy a háromszög-egyenlőtlenséget nem tudták alkalmazni a feladatban, csupán reprodukálni voltak képesek ezen összefüggést.

Az elemi gondolkodási műveletvégzésben való járatlanságot mutatta, hogy azon tanulók, akik foglalkoztak a feladattal, csak a feladat egyik részét oldották meg, amikor az alap a leghosszabb, s a másik résszel egyáltalán nem foglalkoztak.

A kombinatorikus gondolkodásmód kialakulatlansága is okozott hibákat: sokan felismertek a háromszög-egyenlőtlenség szerepét a feladatban, megállapították mennyi lehet a meg nem adott oldal maximális és minimális hossza, de nem tudtak mit kezdeni a kapott számadatokkal, s így nem jutottak el a megoldásig, mert nem voltak képesek előállítani a meghatározott egész számokat két egész szám összegeként.

A fenti hibákból arra következtethetünk, hogy a probléma e korosztály számára nehéznek bizonyult és csak a matematikából jó képességű tanulók tudták megoldani. Véleményünk szerint a sikertelen megoldásokat adó tanulók számára megfelelő egyéni segítséget nyújtva rávezethetjük őket a helyes megoldásra.

Fenti észrevételeink olyan feltételezések, amelyek a tanulói munkák elemzésén alapulnak. További vizsgálatok szükségesek azonban annak eldöntésére, hogy mi az oka az alacsony teljesítményszintnek. Ezért végeztünk egyéni vizsgálatokat is, amelyekkel egy következő tanulmányokban foglalkozunk részletesen. A tanulói munkák elemzését figyelembe véve kidolgoztunk egy-egy elméleti modellt a tanulók segítésére, s az egyéni vizsgálatok során ezeket kipróbáltuk.

Az egyéni vizsgálatokban az általunk kidolgozott modellt használtunk. A 2. feladat megoldásához ilyen módon adtunk segítséget a tanulóknak, ha önállóan nem voltak képesek megoldani a problémát.

Mindkét osztálynál az (a) és a (b) tevékenységet alkalmaztuk. A további konstrukciókat — (c) és (d) — a felsőbb évfolyamok számára dolgoztuk ki.

## 5. Elemi számelméleti problémák négyzetrácsra írt számok lefedésével

### (a) *Tevékenység:*

Rajzolj egy  $4 \times 4$ -es négyzetrácsot! A négyzetekbe írd be rendre az 1, 2, 3, ..., 16 természetes számokat a bal felső sorokból indulva, balról jobbra, felülről lefelé haladva.

Vágj ki átlátszó fóliából egy  $2 \times 2$ -es négyzetet.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

**Feladatok:**

1. Takard le minden lehetséges módon a számozott négyzetrácsot a  $2 \times 2$ -es négyzettel. Hány különböző letakarás lehetséges?
2. Határozd meg minden esetben a letakart számok összegét!
3. Hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 3-mal?
4. Hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 5-tel?
5. Van-e olyan letakarás, amikor az összeg osztható 15-tel?
6. Írd fel a négy szám összegét általánosan!
7. Az általánosan felírt összeg segítségével fogalmaz meg további problémákat!

**(b) Tevékenység:**

Rajzolj egy  $8 \times 8$ -as négyzetrácsot! Az előző feladat feltételei szerint írd be az egyes négyzetekbe rendre az 1, 2, 3, ..., 64 természetes számokat! Ismét az átlátszó fóliából kivágott  $2 \times 2$ -es négyzettel dolgozz!

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 19 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

**Feladatok:**

1. Takard le a négyzetrácsot a  $2 \times 2$ -es négyzettel úgy, hogy a letakart négy szám összege osztható legyen 3-mal. Keress minél több megoldást!
2. Ha minden lehetséges módon elvégezzük a letakarást, akkor hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 3-mal?
3. Írd fel általánosan a négy szám összegét!

4. A letakarások elvégzése nélkül próbálj választ adni a kérdésre az általános alak segítségével! Hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 9-cel?

5. Igaz-e, hogy az összeg mindig osztható 4-gyel? Miért?

6. Fogalmazz meg további problémákat!

(c) **Gondolati konstrukciók:** (Szükség esetén rajzos modell készítése)

— Képzeld el egy  $11 \times 11$ -es négyzetrácsot, amelybe rendre beírtuk az  $1, 2, 3, \dots, 121$  természetes számokat az előző feladatok feltételei szerint, majd minden lehetséges módon letakartuk a  $2 \times 2$ -es négyzettel.

**Feladatok:**

1. Írd fel a letakart számok összegét általánosan!

2. Hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 8-cal?

3. Hány esetben lesz a letakart számok összege osztható 3-mal?

4. Igazold, hogy az összeg mindig osztható 4-gyel!

5. Hány letakarás esetén lesz az összeg osztható 12-vel?

(d) **További gondolati konstrukciók:** (modell segítségével vagy attól elvonatkoztatva)

— Képzeld el egy  $1997 \times 1997$ -es négyzetrácsot, amelyre beírtuk a számokat az előző feltételek szerint és minden lehetséges módon letakartuk a  $2 \times 2$ -es négyzettel.

**Feladatok:**

1. Írd fel a letakart számok összegét általánosan!

2. Bizonyítsd be, hogy bármely letakarás esetén teljesül, hogy az összeg osztható 4-gyel!

3. Fogalmazz meg ezen lefedésekhez kapcsolódó további problémákat!

A további problémák konstruálásához célszerű tanári segítséget nyújtani. Például: A négyzetrácsba prímszámokat páros vagy páratlan számokat írjunk, lefedő alakzatként  $3 \times 3$ -as négyzetet,  $3 \times 3$ -as vagy  $2 \times 2$ -es téglalapot használhatunk.

Következő tanulmányunkban a modellek alkalmazásához kapcsolódó tapasztalatainkról számolunk be.

## Irodalom

- [1] AMBRUS ANDRÁS: *Matematikadidaktikai tanulmányok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- [2] BALOGH LÁSZLÓ: *Feladatrendszerek és gondolkodásfejlesztés*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
- [3] BALOGH LÁSZLÓ—HERSKOVITS MÁRIA—TÓTH LÁSZLÓ: *Tehetség és képességek*, KLTE Pedagógiai-Pszichológiai Tanszék Debrecen, 1995.
- [4] CZEGLÉDY ISTVÁN: *Matematika tantárgypedagógia I.*, Calibra, Budapest, 1997.
- [5] KELEMEN LÁSZLÓ: *A 10—14 éves tanulók tudásszintje és gondolkodása*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1963.
- [6] LÉNÁRD FERENC: *A problémamegoldó gondolkodás*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978.
- [7] PÓLYA GYÖRGY: *A gondolkodás iskolája*, Gondolat, Budapest, 1971.
- [8] PÓLYA GYÖRGY: *A problémamegoldás iskolája I-II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.
- [9] SALAMON JENŐ: *A megismerő tevékenység fejlődéslélektana*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.

DR. OROSZ GYULÁNÉ

ESZTERHÁZY KÁROLY TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA

MATEMATIKA TANSZÉK

LEÁNYKA U. 4.

3301 EGER, PF. 43.